Programación lineal

Problema: Uno de los primeros problemas de optimización 1930/1940. Busca minimizar el costo de alimentar a los soldados con una dieta saludable

Programming viene del sentido ingles (schedule etc).

2000 kcal, 55g de proteinas, 800mg calcio.

Comida	Porción tamaño	Energía	Prot (g)	Calcio (mg)	Costo
Pollo	100g	205	32	12	24
Huevos	2 huevos	160	13	54	13
Leche	237cc	160	8	285	9
Cereza (torta)	170g	420	4	22	20
Cerdo con porotos	260g	260	14	80	19

Como hay comidas que "saturan"/empalagan tenemos restr

Menos de 3 porciones de pollo por día
2 huevo
8 Leche
2 torta
2 Cerdo

Hay muchas combinaciones que sirven

Por ejemplo 8 de leche y 2 de tarta, pero hay tantas que bruteforcear se vuelve intratable.
(la mejor).

Si x_1 = una porción de pollo

x_2 = huevos

x_3 = Leche

x_4 = tarta

x_5 = Cerdo.

Lo que nos pide el problema es minimizar el costo

$$\min \left(24x_1 + 13x_2 + 9x_3 + 20x_4 + 19x_5\right)$$

s.a.:

$$0 \le x_1 \le 3$$
$$0 \le x_2 \le 2$$
$$\le 8$$
$$\le 2$$
$$\le 2$$

$$205x_1 + 160x_2 + 160x_3 + 420x_4 + 260x_5 \geq 2000$$
$$32x_1 + 13x_2 + 8 + 4 + 14 \geq 55$$
$$12 + 54 + 285 + 22 + 80 \geq 800$$

Problemas de este tipo se llaman lineales, en particular permitimos fracciones de porciones por ej la solución óptima podría requerir "0.12" porciones de 2 huevos.

Obs: es muy fácil modificar el modelo i.e. agregando o sacando restricciones.

Nota histórica: La programación lineal empieza en 1947 con el algoritmo SIMPLEX (Dantzig). desarrollado para la fuerza aerea de U.S.

Rápidamente se dieron cuenta que muchos problemas de decisión se podrían resolver usando SIMPLEX que antes se resolvían por "exp e intuición".

Nota: SIMPLEX no $\in P$, es exponencial en el peor caso (pero los modelos nunca se acercan).

Hay algoritmos polinomiales (interior point) (Karmakar)

SIMPLEX

max $5x_1 + 4x_2 + 3x_3$

s.a. $2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 5$

$4 + x_2 + 2 \leq 11$

$3 + 4 + 2 \leq 8$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

Variables de holgura.

$$\begin{aligned} x_4 &= 5 - 2x_1 - 3x_2 - x_3 \\ x_5 &= 11 - 4x_1 - x_2 - 2x_3 \\ x_6 &= 8 - 3x_1 - 4x_2 - 2x_3 \\ \hline z &= 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 \end{aligned}$$

x_4, x_5, x_6 básicos
x_1, x_2, x_3 no básicas

Cada solución factible de este sistema nos da una solución del original.

La idea es mejorar z hasta que no podamos más.
Necesitamos una sol inicial ~~(puede no existir~~

- Puede no existir $\Rightarrow$ es infactible
- Puede existir pero igual ser infactible
- Hay formas de extender el modelo para buscarla.

Ej: $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, $x_4 = 5$, $x_5 = 11$, $x_6 = 8$.

Elegimos una no básica y la vamos a intentar agrandar lo más que podamos por ej x_1

$\Rightarrow x_2 = x_3 = 0$, $x_4 = 5 - 2x_1 \geq 0 \Rightarrow x_1 \leq \frac{5}{2}$

$x_5 = 11 - 4x_1 \geq 0 \Rightarrow x_1 \leq \frac{11}{4}$

$x_6 = 8 - 3x_1 \geq 0 \Rightarrow x_1 \leq 8/3$

Elegimos el mas chico. $x_1 \leq 5/2$.

~~Reemplazando~~ Entonces despejamos la eq correspondiente

$$x_1 = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4$$

Reemplazando

$$x_5 = 11 - 4\left(\frac{5}{2} - \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4\right) - x_2 - 2x_3$$

$$= 1 + 5x_2 + 2x_4$$

$$x_6 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{3}{2}x_4$$

$$z = \frac{25}{2} - \frac{7}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{5}{2}x_4$$

$$x_1 = 5/2 - 3/2\,x_2 - 1/2\,x_3 - 1/2\,x_4$$

$$x_5 = 1 + 5x_2 + 2x_4$$

$$x_6 = 1/2 + 1/2\,x_2 - 1/2\,x_3 + 3/2\,x_4$$

$$z = 25/2 - 7/2\,x_2 + 1/2\,x_3 - 5/2\,x_4$$

Solo podemos elegir la no básica x_3.

$x_2 = x_4 = 0$

$x_1 \geq 0 \Rightarrow x_3 \leq 5$

$x_6 \geq 0 \Rightarrow x_3 \leq 1$

x_5 no restringe a x_3

Sustituyendo obtenemos

$$x_3 = 1 + x_2 + 3x_4 - 2x_6$$
$$x_1 = 2 - 2x_2 - 2x_4 + x_6$$
$$x_5 = 1 + 5x_2 + 2x_4$$
$$z = 13 - 3x_2 - x_4 - x_6$$

Como son todas negativas no podemos avanzar más.

La solución es

$$x_3 = 1, \quad x_1 = 2, \quad x_5 = 1$$
$$x_2 = x_4 = x_6 = 0.$$

Problemas ~ Ciclying 1955 Hoffman descubre que simplex puede ciclar indefinidamente

Inicialización: la solución inicial no es siempre trivial de encontrar

Terminación: Puede ser que no termine?

Dualidad

¿Cómo podemos ver que SIMPLEX alcanza el óptimo?

Si z es la solución óptima queremos dar una cota superior, si es posible la más ajustada.

$$x_1, x_2 \geq 0$$
$$x_1 \leq 3000$$
$$x_2 \leq 4000$$
$$x_1 + x_2 \leq 5000$$

$$\max \ \underset{1.2}{\cancel{1.8}} x_1 + 1.7 x_2 \leq ?$$

Si multiplicamos la primer y segund eq por valores >0, por ej 1.2 y 1.7 tenemos

$$\left.\begin{array}{l} 1.2\, x_1 \leq 3600 \\ 1.7\, x_2 \leq 6800 \end{array}\right\} \Rightarrow \max (\ ) \leq 10400$$

En particular

Primal	Dual
$x_1, x_2 \geq 0$	$y_1, y_2, y_3 \geq 0$
$y_1 \; (x_1 \quad) \leq 3000$	$y_1 + \cdot + y_3 \geq 1.2$
$y_2 \; (\quad x_2) \leq 4000$	$y_2 + y_3 \geq 1.7$
$y_3 \; (x_1 + x_2) \leq 5000$	$\min(3000y_1 + 4000y_2 + 5000y_3)$

$\left.\begin{matrix} y_1 + \cdot + y_3 \geq 1.2 \\ y_2 + y_3 \geq 1.7 \end{matrix}\right\}$ cota sup.

Primal | Dual

<u>Thm</u>: (Weak duality) el valor del primal $\leq$ dual, si coinciden tenemos el optimo.

<u>Thm</u>: (strong duality theorem). Si alguno de los dos (primal o dual tienen optimo $\Rightarrow$ coinciden.

<u>Obs</u>: Encontrar una solución óptima es tan difícil como encontrar una factible.